数理解析研究所講究録
777巻 1992年 51-67

The Structure of the Model through Some Estimation Procedure

筑波大学数学系 赤平 昌文 (Masafumi Akahira)

1. はじめに

高次漸近理論において、漸近有効推定量を比較するときに漸近欠損量(asymptotic deficiency)の概念は重要な役割を果たす。その際に、ある次数まで何らかの意味で不偏性をもつように修正する必要がある。従来の議論においては、2つの漸近中央値不偏性(as. median unbiasedness 略して AMU)をもつように修正した上で、3次の次数までそれらの漸近分布が、ある意味で同等になるために一方の推定量が他方に対してもつ漸近欠損量を求めることができた(e.g. Akahira, 1986)。しかし推定量のクラスを広くした場合に、実際に3次の次数まで不偏性をもつように修正項を具体的に求めることは、局外母数が存在する時などには必ずしも容易でない(Pfanzagl & Wefelmeyer (1985))。

ここでは、まず2つの漸近有効推定量の比較において漸近

欠損量を用いる際には、2次の次数まで何らかの意味で不偏性をもつように修正し、その上で3次の次数まで2つの漸近分布がある意味で同等となるようにすればよいことを示す。

次に、真のモデルと仮想モデルを考えて、両モデルにおける3次の漸近有効推定量を仲介にして、両モデルの構造の相違を漸近欠損量を用いて明らかにすることは可能である(Akahira, 1989). しかし真のモデル、仮想モデルのそれぞれの下では、適当な条件を仮定すれば、修正最尤推定量とジャックナイフ推定量の間の漸近欠損量は0となる。そこでより一般の推定量を用いることは1つの興味ある問題となる。ここでは、仮想モデルの下で、2次の漸近有効推定量間の漸近欠損量を求めて、モデルの構造を明らかにする。もっと具体的には、仮想モデルの下で、差分尤度方程式の解として定義された差分尤度推定量の最尤推定量に対する漸近欠損量を求める。この欠損量は推定すべき母数に関する情報量損失と仮想モデルの不正確さを表わす量から成っており、両者のバランスによって正、負の値をとり得ることになる。

2. 漸近有効推定量の漸近欠損性

$X_1, \cdots, X_n$をたがいに独立に、いずれも(σ-有限測度μに関する)密度関数$f(x,\theta)$ $(\theta \in \Theta)$に従う確率変数とする。

大きさnの標本に基づくθの推定量$\hat{\theta}_n=\hat{\theta}_n(X_1,\cdots,X_n)$は、$\sqrt{nI(\theta)}\,(\hat{\theta}_n-\theta)$の漸近分布が標準正規分布であるとき、最良漸近正規(best asymptotically normal 略してBAN)であるという。ただし$I(\theta)$をfのFisher情報量とする。

推定量のクラスを考えるために、

$$Z_1(\theta)=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(X_i,\theta)$$

とおく。このとき、次の条件(i)、(ii)、(iii)を満たすすべての修正BAN推定量のクラスを$\mathbb{C}'$とする。

(i) $\hat{\theta}_n$が2次の漸近的不偏、すなわち$E_\theta(\hat{\theta}_n)=\theta+o(1/n)$、

(ii) $$\sqrt{n}\,(\hat{\theta}_n-\theta)=\frac{Z_1(\theta)}{I(\theta)}+\frac{1}{\sqrt{n}}Q(\theta)+\frac{1}{n}R(\theta)+o_p\left(\frac{1}{n}\right),\qquad(2.1)$$

ただし$Q(\theta)=O_p(1)$, $R(\theta)=O_p(1)$とする。

(iii) $\sqrt{n}\,(\hat{\theta}_n-\theta)$の分布が$n^{-1}$の次数までEdgeworth展開可能である。

上のクラス$\mathbb{C}'$において、2次の漸近不偏性の代わりに3次の漸近中央値不偏性を用いたときには、そのクラスを$\mathbb{C}$という(Akahira, 1986)。ここで次の条件を仮定する。

(A.1) $\{x : f(x,\theta)>0\}$はθに無関係である。

(A.2) a.a.$x\,[\mu]$について、$f(x,\theta)$はθに関して4回連続微分可能である。Taylor展開

$$\log \frac{f(x,\theta+h)}{f(x,\theta)} = \sum_{i=1}^{4} \frac{h^i}{i!} \ell^{(i)}(\theta,x) + h^4 R(x,h)、$$

において、$R(x,h)$は、4次まで積率をもつ関数$G(x)$によって一様に有界である．ただし$\ell(\theta,x)=\log f(x,\theta)$で$\ell^{(i)}(\theta,x)=(\partial^i/\partial\theta^i)\ell(\theta,x)$とする．

(A.3) 各$\theta \in Ⓗ$に対して

$$0 < I(\theta) = E_\theta[\{\ell^{(1)}(\theta,X)\}^2] = -E_\theta[\ell^{(2)}(\theta,X)] < \infty$$

で、$I(\theta)$はθに関して3回微分可能である．

(A.4)

$$J(\theta) = E_\theta[\ell^{(1)}(\theta,X)\ell^{(2)}(\theta,X)],\ K(\theta) = E_\theta[\{\ell^{(1)}(\theta,X)\}^3],$$

$$L(\theta) = E_\theta[\ell^{(1)}(\theta,X)\ell^{(3)}(\theta,X)],$$

$$M(\theta) = E_\theta[\{\ell^{(2)}(\theta,X)\}^2] - I^2(\theta),$$

$$N(\theta) = E_\theta[\{\ell^{(1)}(\theta,X)\}^2\ell^{(2)}(\theta,X)] + I^2(\theta),$$

$$H(\theta) = E_\theta[\{\ell^{(1)}(\theta,X)\}^4] - 3I^2(\theta)$$

で、$J(\theta)$と$K(\theta)$はθに関して微分可能であり、

$$E_\theta[\ell^{(3)}(\theta,X)] = -3J(\theta) - K(\theta),$$

$$E_\theta[\ell^{(4)}(\theta,X)] = -4L(\theta) - 3M(\theta) - 6N(\theta) - H(\theta)$$

である．

さて、大きさnの標本に基づくクラス$\mathbb{C}'$の推定量を$\hat{\theta}_n$とし、$k(n)$を、$d=\lim_{n\to\infty}(k(n)-n)$が存在し、大きさ$k(n)$の標本に基づくクラス$\mathbb{C}'$の推定量$\hat{\theta}^*_{k(n)}$が、$\hat{\theta}_n$とある意味で漸近的に同等になるような自然数とする。このとき、dは$\hat{\theta}_n$に対する$\hat{\theta}^*_{k(n)}$の漸近欠損量(asymptotic deficiency)という。ここで問題となるのは、大きさnの標本に基づく推定量$\hat{\theta}_n$に対して、これと同等となるために、大きさ$k(n)$の標本に基づく推定量$\hat{\theta}^*_{k(n)}$が必要とする標本数である。この問題を高次漸近理論の枠組の中で考えるとき、上の漸近欠損量の概念が重要な役割を果たす。

定理 2.1. 条件(A.1)〜(A.4)が成り立つことを仮定する. 漸近展開(2.1)をもつクラス$\mathbb{C}'$の推定量を$\hat{\theta}_n$とする. このとき、各$i=1,2,3,4$について$\hat{\theta}_n$のi次の漸近キュムラントは$o(n^{-1})$の次数まで次のようになる. $T_n=\sqrt{n}(\hat{\theta}_n-\theta)$に対して

$$k_1=E_\theta[T_n]=\frac{\mu_2(\theta)}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$k_2=Var_\theta(T_n)=\frac{1}{I(\theta)}+\frac{\tau(\theta)}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$k_3=k_{3,\theta}(T_n)=E_\theta[\{T_n-E_\theta(T_n)\}^3]=\frac{\beta_3(\theta)}{\sqrt{n}}+\frac{\gamma(\theta)}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$k_4=K_{4,\theta}(T_n)=E_\theta[\{T_n-E_\theta(T_n)\}^4]-3\{Var_\theta(T_n)\}^2=\frac{\beta_4(\theta)}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

である．ただし $\mu_2(\theta)=E_\theta[R(\theta)]$, $\tau(\theta)=Var_\theta(Q(\theta))$, $\beta_3(\theta)=-\{3J(\theta)+2K(\theta)\}/I^3(\theta)$, $\gamma(\theta)=\{3/2I(\theta)\}E_\theta[Z_1(\theta)Q^2(\theta)]$, $\beta_4(\theta)=12(2J(\theta)+K(\theta))(J(\theta)+K(\theta))/I^5(\theta)-(3H(\theta)+4L(\theta)+12N(\theta))/I^4(\theta)$ とする．

証明は Akahira (1986) の Theorem 2.1.1 の証明と同様にしてできる．

<u>注意 2.1.</u> 定理 2.1 の $\hat{\theta}_n$ の漸近キュムラントにおいて、$\mu_2(\theta)$, $\tau(\theta)$, $\gamma(\theta)$ が $\hat{\theta}_n$ に依存しているが、他の項は $\hat{\theta}_n$ に無関係であることが分かる．漸近展開 (2.1) の型を持つ大きさ $k(n)$ の標本に基づくクラス $\mathbb{C}'$ の推定量を $\hat{\theta}^*_{k(n)}$ とする、すなわち

$$T^*_{k(n)}=\sqrt{k(n)}(\hat{\theta}^*_{k(n)}-\theta)=\frac{Z_1(\theta)}{I(\theta)}+\frac{1}{\sqrt{k(n)}}Q^*(\theta)+\frac{1}{k(n)}R^*(\theta)+o_p\left(\frac{1}{\sqrt{k(n)}}\right) \tag{2.2}$$

とする．ただし $Q^*(\theta)=O_p(1)$, $R^*(\theta)=O_p(1)$ とする．定理 2.1 から $\hat{\theta}^*_{k(n)}$ の漸近キュムラントは、定理 2.1 において $\mu_2(\theta)$, $\tau(\theta)$, $\gamma(\theta)$ はそれぞれ $\mu_2^*(\theta)=E_\theta[R^*(\theta)]$, $\tau^*(\theta)=Var_\theta(Q^*(\theta))$, $\gamma^*(\theta)=\{3/2I(\theta)\}E_\theta[Z_1(\theta)Q^{*2}(\theta)]$ によって置き換えたものになる．

定理2.2. 条件(A.1)〜(A.4)は成り立つと仮定する．$\hat{\theta}_n$ を漸近展開(2.1)をもつクラス$\mathbb{C}'$の推定量とする．このとき、$\hat{\theta}_n$ の分布の Edgeworth 展開は $o(n^{-1})$ の次数まで次のようになる．

$$P_{\theta,n}\{\sqrt{nI(\theta)}(\hat{\theta}_n-\theta)\le t\}$$

$$\begin{aligned}
&=\Phi(t)-\frac{1}{n}\sqrt{I(\theta)}\,\mu_2(\theta)\phi(t)-\frac{1}{6\sqrt{n}}I(\theta)\sqrt{I(\theta)}\,\beta_3(\theta)(t^2-1)\phi(t)\\
&\quad-\frac{1}{24n}I^2(\theta)\beta_4(\theta)(t^3-3t)\phi(t)-\frac{1}{72n}I^3(\theta)\beta_3^2(\theta)(t^5-10t^3+15t)\phi(t)\\
&\quad-\frac{1}{2n}I(\theta)\tau(\theta)t\phi(t)-\frac{1}{6n}I(\theta)\sqrt{I(\theta)}\,\gamma(\theta)(t^2-1)\phi(t)+o\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}\tag{2.3}$$

ただし $\mu_2(\theta)$, $\beta_3(\theta)$, $\beta_4(\theta)$, $\tau(\theta)$, $\gamma(\theta)$ は定理2.1において与えられているもので、$\Phi(t)=\int_{-\infty}^{t}\phi(x)dx$, $\phi(x)=(1/\sqrt{2\pi})e^{-x^2/2}$ とする。

証明は Akahira (1986) の Theorem 2.1.2 のそれと同様にしてできる。

定理2.3. 条件(A.1)〜(A.4)が成り立つと仮定する．推定量 $\hat{\theta}_n$, $\hat{\theta}^*_{k(n)}$が、それぞれ漸近展開(2.1), (2.2)をもち、クラス$\mathbb{C}'$に属するとする．また $C(\theta)=\sqrt{I(\theta)}(\mu_2^*(\theta)-\mu_2(\theta))-I(\theta)\sqrt{I(\theta)}(\gamma^*(\theta)-\gamma(\theta))/6$ とする．このとき $\hat{\theta}_n$ と $\hat{\theta}^*_{k(n)}$の漸近分布が $o(n^{-1})$の次数まで等しい、すなわち

$$P_{\theta,n}\{\sqrt{nI(\theta)}(\hat{\theta}_n-\theta)\leq t\}=P_{\theta,k(n)}\{\sqrt{nI(\theta)}(\hat{\theta}^*_{k(n)}-\theta)\leq t+\frac{C(\theta)}{n}\}$$
$$+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

であるための必要十分条件は、$\hat{\theta}_n$に対する$\hat{\theta}^*_{k(n)}$の漸近欠損量dが

$$d=I(\theta)(\tau^*(\theta)-\tau(\theta))+\frac{t}{3}I^{3/2}(\theta)(\gamma^*(\theta)-\gamma(\theta)) \qquad (2.4)$$

となることである。ただし、$\mu_2(\theta)$, $\mu_2^*(\theta)$, $\tau(\theta)$, $\tau^*(\theta)$, $\gamma(\theta)$, $\gamma^*(\theta)$は定理2.1, 注意2.1で与えられたものとする。

証明は省略するが、Edgeworth展開(2.3)を用いればよい（詳しくはAkahira(1991a)を参照）。

<u>系2.1.</u> 定理2.3と同じ条件を仮定する。さらにクラス$\mathcal{C}'$の推定量$\hat{\theta}_n$, $\hat{\theta}^*_{k(n)}$がともに3次の漸近不偏性、すなわち$\mu_2(\theta)=\mu_2^*(\theta)=0$を満たすとし、$c^*(\theta)=-I^{3/2}(\theta)(\gamma^*(\theta)-\gamma(\theta))/6$とする。このとき、$\hat{\theta}_n$と$\hat{\theta}^*_{k(n)}$の漸近分布が$o(n^{-1})$の次数まで等しい、すなわち

$$P_{\theta,n}\{\sqrt{nI(\theta)}(\hat{\theta}_n-\theta)\leq t\}=P_{\theta,k(n)}\{\sqrt{nI(\theta)}(\hat{\theta}^*_{k(n)}-\theta)\leq t+\frac{1}{n}c^*(\theta)\}$$
$$+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

であるための必要十分条件は、$\hat{\theta}_n$に対する$\hat{\theta}^*_{k(n)}$の漸近欠損量dが(2.4)となることである。

系2.1の結果は、定理2.3から簡単に導かれる。

3. 局外母数をもつモデル

$X_1, \cdots, X_n$ をたがいに独立に、いずれも（σ-有限測度 μ に関する）密度関数 $f(x, \theta, \xi)$ をもつ分布に従うとする．ただし、θ は推定すべき実母数、ξ は局外実母数とする．さらに次の条件 (B.1) ～ (B.5) が成り立つと仮定する．

(B.1) f の台 $\{x : f(x, \theta, \xi) > 0\}$ は θ と ξ に無関係である．

(B.2) ほとんどすべての $x[\mu]$ について、$f(x, \theta, \xi)$ は θ と ξ について 3回連続微分可能である．

(B.3) 各 θ と各 ξ について

$$0 < I_{00}(\theta, \xi) = E[\{l_0(\theta, \xi, X)\}^2] = -E[l_{00}(\theta, \xi, X)] < \infty,$$

$$0 < I_{11}(\theta, \xi) = E[\{l_1(\theta, \xi, X)\}^2] = -E[l_{11}(\theta, \xi, X)] < \infty$$

である．ただし $l_0(\theta, \xi, x) = (\partial/\partial\theta)l(\theta, \xi, x)$, $l_{00}(\theta, \xi, x) = (\partial^2/\partial\theta^2)l(\theta, \xi, x)$, $l_1(\theta, \xi, x) = (\partial/\partial\xi)l(\theta, \xi, x)$, $l_{11}(\theta, \xi, x) = (\partial^2/\partial\xi^2)l(\theta, \xi, x)$ で $l(\theta, \xi, x) = \log f(x, \theta, \xi)$ とする．

(B.4) 母数 θ, ξ が直交性をもつ、すなわち $E[l_{01}(\theta, \xi, X)] = 0$ である．ただし $l_{01}(\theta, \xi, x) = (\partial^2/\partial\theta\partial\xi)l(\theta, \xi, x)$ とする．

(B.5) $J_{000} = E[l_{00}(\theta, \xi, X)l_0(\theta, \xi, X)]$, $J_{001} = E[l_{00}(\theta, \xi, X)l_1(\theta, \xi, X)]$,
$J_{010} = E[l_{01}(\theta, \xi, X)l_0(\theta, \xi, X)]$, $J_{011} = E[l_{01}(\theta, \xi, X)l_1(\theta, \xi, X)]$,

$$J_{110}=E[\ell_{11}(\theta,\xi,X)\ell_0(\theta,\xi,X)],\quad K_{000}=E[\{\ell_0(\theta,\xi,X)\}^3],$$
$$K_{001}=E[\{\ell_0(\theta,\xi,X)\}^2\ell_1(\theta,\xi,X)],$$
$$M_{0000}=E[\{\ell_{00}(\theta,\xi,X)\}^2]-I_{00}^2,$$
$$M_{0001}=E[\ell_{00}(\theta,\xi,X)\ell_{01}(\theta,\xi,X)],$$
$$M_{0101}=E[\{\ell_{01}(\theta,\xi,X)\}^2]$$

が存在し、

$$E[\ell_{000}(\theta,\xi,X)]=-3J_{000}-K_{000},\quad E[\ell_{001}(\theta,\xi,X)]=-J_{010},$$
$$E[\ell_{011}(\theta,\xi,X)]=-J_{011}$$

が成り立つ。ただし $\ell_{000}(\theta,\xi,x)=(\partial^3/\partial\theta^3)\ell(\theta,\xi,x)$, $\ell_{001}(\theta,\xi,x)=(\partial^3/\partial\theta^2\partial\xi)\ell(\theta,\xi,x)$, $\ell_{011}(\theta,\xi,x)=(\partial^3/\partial\theta\partial\xi^2)\ell(\theta,\xi,x)$ とする。

条件(B.5)から、$K_{001}=-J_{010}-J_{001}$ となることが分かる。

また

$$Z_j=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\ell_j(\theta,\xi,X_i)\quad(j=0,1),$$

$$Z_{00}=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\{\ell_{00}(\theta,\xi,X_i)+I_{00}\},\quad Z_{01}=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\ell_{01}(\theta,\xi,X_i)$$

とおく。

4. 仮想モデルの下での最尤度推定量

この節では、真の~~母~~数 $\theta=\theta_0$, $\xi=\xi_0$ をもつモデルを真のモデル (θ_0,ξ_0) といい、これに対して $\theta=\theta_0$, $\xi=0$ なる

母数をもつモデルを、仮想モデル$(\theta_0, 0)$ということにする。ここでは $\xi_0 = t/\sqrt{n}$ $(-\infty < t < \infty)$ と仮定する．これ以後、簡単のために θ_0, ξ_0 をそれぞれ θ, ξ で表わす．仮想されたモデルの下で、大きさnの標本 $X_1, \cdots, X_n$ に基づく θ の最尤推定量を $\hat{\theta}_{ML}$ とする．

定理4.1. 条件(B.1)～(B.5)が成り立つと仮定する．このとき、仮想モデル$(\theta, 0)$の下で θの最尤推定量 $\hat{\theta}_{ML}$ は漸近展開

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_{ML} - \theta) = \frac{Z_0}{I_{00}} + \frac{1}{\sqrt{n}} Q_0 + \frac{1}{\sqrt{n}}(L - C) + \frac{1}{n} R_0 + o_p\left(\frac{1}{n}\right)$$

をもつ。ただし

$$Q_0 = \frac{1}{I_{00}^2}\left(Z_{00} Z_0 - \frac{3J_{000} + K_{000}}{2I_{00}} Z_0^2\right),$$

$$L = \frac{t}{I_{00}}\left(\frac{J_{010}}{I_{00}} Z_0 - Z_{01}\right), \qquad C = \frac{J_{011}}{2I_{00}} t^2,$$

で、$O_p(R_0) = 1$ とし、$o_p(\cdot)$ は密度 $f(x, \theta, \xi)$をもつ分布の下で得られるとする．

この定理は Akahira (1989) の Theorem 4.1 とほぼ同じであるので、証明は省略する．

次に、任意の実数rに対して $\hat{\theta}_n^* = \hat{\theta}_n^*(X_1, \cdots, X_n)$ が差分尤度方程式

$$\sum_{i=1}^{n} l(\hat{\theta}_n^* + r n^{-1/2}, 0, X_i) - \sum_{i=1}^{n} l(\hat{\theta}_n^*, 0, X_i) = a_n(\hat{\theta}_n^*, 0, r)$$

を満たすとき、$\hat{\theta}_n^*$ を θ の差分尤度推定量 (discretized likelihood estimator 略して DLE) という。ただし、$a_n(\theta, \xi, r)$ は θ と ξ の関数で、r と n にも依存し、$\hat{\theta}_n^*$ が k 次の漸近的不偏、すなわち $E(\hat{\theta}_n^*) = \theta + o(n^{-k/2})$ となるように定められたものとする。ここで $\hat{\theta}_n^*$ が r に依存していることに注意。

仮想モデル $(\theta, 0)$ の下で DLE の漸近展開を求めるために次のことを仮定する。

(B.6) $\quad J_{011} = 0 \quad , \quad J_{001} = 0$.

この条件は、関数 $a_n(\theta, \xi, r)$ を通して、仮想モデルの不正確さに依る偏りを $o(n^{-1})$ の次数まで調節するために必要になる。θ が位置母数の場合、すなわち $f(x, \theta, \xi) = f_0(x-\theta, \xi)$ のときに、$f_0(x, \xi)$ が対称性をもつならば、(B.6) の $J_{011} = 0$ が成り立つ。また

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\{\frac{\partial}{\partial\theta} \log f_0(x-\theta, \xi)\right\}\left\{\frac{\partial}{\partial\xi} f_0'(x-\theta, \xi)\right\} d\mu(x) = 0 ,$$

$$\lim_{|x|\to\infty} f_0'(x-\theta, \xi) \frac{\frac{\partial}{\partial\xi} f_0(x-\theta, \xi)}{f_0(x-\theta, \xi)} = 0$$

が成り立つならば、(B.6) の $J_{001} = 0$ を得る。

<u>定理 4.2.</u> 条件 (B.1) ～ (B.6) が成り立つと仮定する。仮想モデル $(\theta, 0)$ の下で、θ の DLE $\hat{\theta}_{DL}^{\gamma}$ は漸近展開

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_{DL}^{\gamma} - \theta) = \frac{Z_0}{I_{00}} + \frac{\gamma}{2I_{00}\sqrt{n}}\left(Z_{00} - \frac{J_{000}}{I_{00}} Z_0\right) + \frac{1}{\sqrt{n}} L + \frac{1}{\sqrt{n}}(Q_0 - a)$$
$$+ \frac{1}{n} R_0^* + o_p\left(\frac{1}{n}\right)$$

をもつ。ただし L と Q_0 は定理 4.1 で与えられたものとし、$a = -(J_{000} + K_{000})/(2I_{00}^2)$、$R_0^* = O_p(1)$ とする。さらに仮想モデル $(\theta, 0)$ の下で、DLE $\hat{\theta}_{DL}^{\gamma}$ が点 u において修正最尤推定量 $\hat{\theta}_{ML}^{0}$ $(\in \mathbb{C}')$ と n^{-1} の次数まで同じ漸近分布をもつ、すなわち

$$P_{\theta,\xi,n}\left\{\sqrt{nI_{00}}(\hat{\theta}_{ML}^{0} - \theta) \le u\right\} = P_{\theta,\xi,n}\left\{\sqrt{nI_{00}}(\hat{\theta}_{DL}^{\gamma} - \theta) \le u + \frac{c_0}{n}\right\} + o(n^{-1})$$

となるようするためには、$\hat{\theta}_{ML}^{0}$ に対する $\hat{\theta}_{DL}^{\gamma}$ の漸近欠損量 $D_t(u, \gamma)$ は、

$$D_t(u,\gamma) = \frac{\gamma}{4I_{00}^2}\left(\gamma + \frac{2u}{\sqrt{I_{00}}}\right)(I_{00}M_{0000} - J_{000}^2)$$
$$- \frac{\gamma t}{I_{00}^2}(I_{00}M_{0001} - J_{000}J_{010}) \qquad (4.1)$$

である。ただし

$$c_0 = \sqrt{I_{00}}(\mu_2^* - \mu_2) - \frac{\gamma}{4I_{00}^{3/2}}(I_{00}M_{0000} - J_{000}^2)$$

で $\mu_2 = E_{\theta,\xi}(R_0)$, $\mu_2^* = E_{\theta,\xi}(R_0^*)$ とする。

注意4.1. 修正最尤推定量 $\hat{\theta}^0_{ML}$ は具体的には

$$\hat{\theta}^0_{ML} = \hat{\theta}_{ML} + \frac{J_{000}(\hat{\theta}_{ML}) + K_{000}(\hat{\theta}_{ML})}{2n I^2_{00}(\hat{\theta}_{ML})}$$

で与えられ、漸近展開

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}^0_{ML} - \theta) = \frac{Z_0}{I_{00}} + \frac{1}{\sqrt{n}}(Q_0 - a) + \frac{1}{\sqrt{n}}(L - c) + \frac{1}{n}R_0 + o_p\left(\frac{1}{n}\right)$$

をもつ。$\hat{\theta}^0_{ML}$ に対する $\hat{\theta}^r_{DL}$ の漸近欠損量 $D_t(u, r)$ は (4.1)の第1項に当たる $\hat{\theta}^0_{ML}$ の情報量損失と、(4.1)の第2項に当たる仮想モデルの不正確さによる量とから成っている。

定理4.2の証明は、DLE $\hat{\theta}^r_{DL}$ の漸近展開を求めて、定理2.3を適用する（詳しくは Akahira(1991b) 参照）。

系4.1. 条件(B.1)〜(B.5)が成り立つと仮定する。さらに、θ は位置母数、すなわち $f(x, \theta, \xi) = f_0(x - \theta, \xi)$ で、$f_0(x, \xi)$ は対称をもつ、すなわち $f_0(x, \xi) = f_0(-x, \xi)$ であるとする。このとき、$\xi = t/\sqrt{n}$ ならば、仮想モデル$(\theta, 0)$の下で、DLE $\hat{\theta}^r_{DL}$ と最尤推定量 $\hat{\theta}_{ML}$ は漸近展開

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}^r_{DL} - \theta) = \frac{Z_0}{I_{00}} + \frac{1}{\sqrt{n}}L + \frac{1}{\sqrt{n}}Q^*_0 + \frac{r}{2I_{00}\sqrt{n}}Z_{00} + o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_{ML} - \theta) = \frac{Z_0}{I_{00}} + \frac{1}{\sqrt{n}}L + \frac{1}{\sqrt{n}}Q^*_0 + o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

をもつ。ただし L は定理4.1で与えられたもので $Q^*_0 = Z_0 Z_{00}/I^2_{00}$

とする．また、仮想モデル$(\theta, 0)$の下で、$\hat{\theta}_{DL}^{\gamma}$が点$u$において$\hat{\theta}_{ML}$と$n^{-1}$の次数まで同じ漸近分布をもつ、すなわち

$$P_{\theta,\xi,n}\{\sqrt{nI_{00}}(\hat{\theta}_{ML}-\theta)\le u\} = P_{\theta,\xi,n}\left\{\sqrt{nI_{00}}(\hat{\theta}_{DL}^{\gamma}-\theta)\le u+\frac{c_0^*}{n}\right\}+o(n^{-1})$$

となるようにするためには、$\hat{\theta}_{ML}$に対する$\hat{\theta}_{DL}^{\gamma}$の漸近欠損量$D_t(u,\gamma)$は

$$D_t(u,\gamma)=\frac{\gamma}{4I_{00}^2}\left(\gamma+\frac{2u}{\sqrt{I_{00}}}\right)M_{0000}$$

である．ただし$c_0^*=\sqrt{I_{00}}(\mu_2^*-\mu_2)-\dfrac{\gamma}{4I_{00}^{3/2}}M_{0000}$とする．

注意 4.2. 系 4.1 において、$u=-\gamma\sqrt{I_{00}}$とするとき、$\hat{\theta}_{ML}$に対する$\hat{\theta}_{DL}^{\gamma}$の漸近欠損量は

$$D_t(-\gamma\sqrt{I_{00}},\gamma)=-\frac{\gamma^2}{4I_{00}^2}M_{0000}\le 0$$

となり、この場合には$\hat{\theta}_{DL}^{\gamma}$は$\hat{\theta}_{ML}$より$o(n^{-1})$の次数まで漸近的に良いことが分かる．

5. 例

前節に関する例を述べる．

例 5.1（正規分布の場合）. $X_1,\cdots,X_n$をたがいに独立にいずれも正規分布$N(\theta,\xi+1)$ $(-\infty<\theta<\infty,\ \xi>0)$に従う確率変数とする．$\xi=t/\sqrt{n}$とするとき、

$$I_{00} = I_{00}(\theta, \xi) = I_{00}(\theta, 0) + o(1) = 1/(\xi+1) = 1 + o(1),$$

$$E_{\theta,\xi}[\ell_{00}^2(\theta, \xi, X)] = E_{\theta,0}[\ell_{00}^2(\theta, 0, X)] + o(1) = 1 + o(1)$$

となり、

$$M_{0000} = M_{0000}(\theta, \xi) = M_{0000}(\theta, 0) + o(1) = 1 + o(1)$$

になる．よって系4.1から、仮想モデル$(\theta, 0)$の下で、最尤推定量に対するDLEの漸近欠損量は

$$D_t(u, r) = \frac{r}{4}(r + 2u) + o(1)$$

となる．

<u>例 5.2</u>（ワイブル型分布）．

$X_1, \cdots, X_n$をたがいに独立に、いずれもワイブル密度関数

$$f_0(x-\theta, \xi) = \frac{\beta}{2(\xi+1)\Gamma((\alpha+1)/\beta)} \left|\frac{x-\theta}{\xi+1}\right|^{\alpha} \exp\left(-\left|\frac{x-\theta}{\xi+1}\right|^{\beta}\right)$$

$(-\infty < x < \infty;\ -\infty < \theta < \infty,\ 0 < \xi,\ 0 < \alpha,\ 0 < \beta)$をもつ分布とする．このとき

$$\alpha = \frac{(\beta-1)(\beta-2)}{(\beta-1)(\beta-2)-2}, \quad 3 < \beta < \frac{3+\sqrt{13}}{2}$$

について、仮想モデル$(\theta, 0)$の下で、$\hat{\theta}_{ML}$に対して$\hat{\theta}_{DL}^{r}$の漸近欠損量は、系4.1から

$$D_t(u, r) = \frac{r}{4I_{00}}\left(r + \frac{2u}{\sqrt{I_{00}}}\right) M_{0000}$$

である．ただし

$$I_{00} = \frac{\Gamma((\alpha-1)/\beta)}{\Gamma((\alpha+1)/\beta)}\{1+\beta(\alpha-1)\} + o(1)$$

$$M_{0000} = \frac{\Gamma((\alpha-3)/\beta)}{\Gamma((\alpha+1)/\beta)}\{\alpha^2 + \alpha(\alpha-3)(\beta^2-1) + (\alpha-3)(\beta-1)^2(\beta-3)\}$$
$$- \left\{\frac{\Gamma((\alpha-1)/\beta)}{\Gamma((\alpha+1)/\beta)}\right\}^2 \{1+\beta(\alpha-1)\}^2 + o(1)$$

である．

References

Akahira, M. (1986). The Structure of Asymptotic Deficiency of Estimators. Queen's Papers in Pure and Applied Mathematics No.75, Queen's University Press, Kingston, Ontario, Canada.

Akahira, M. (1989). Behaviour of jackknife estimators in terms of asymptotic deficiency under true and assumed models. J. Japan Statist. Soc., 19, 179-196.

Akahira, M. (1991a). Higher order asymptotics and asymptotic deficiency of estimators. To appear in Selecta Statistica Canadiana.

Akahira, M. (1991b). The structure of the assumed model through the discretized likelihood estimator. To appear.

Pfanzagl, J. and Wefelmeyer, W. (1985). Asymptotic Expansions for General Statistical Models. Lecture Notes in Statistics 31, Springer, Berlin.